Διαφ. Εξισώσεις

14/11/16

$\{y_1,\dots,y_n\}$ σύνολο λύσεων της $(E_0)^{(n)} \to a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x \in I$

$(a_n \neq 0)$ $a_i \in C(I)$.

$Θ_4$: $\{y_i\}$ γραμμ. ανεξάρτητα $\Leftrightarrow W(y_1,\dots,y_n)(x) \neq 0$, $x \in I$

$Θ_5$: Liouville : $W(y_1,\dots,y_n)(x) = W(y_1,\dots,y_n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}$, $x \in I$, $x_0 \in I$

Παράδειγμα

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^x(x-1)$, $y_3 = 2e^x - e^{2x}$, $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x + e^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x \cdot x & 2e^x(1-e^x) \\ e^x & e^x(x+1) & 2e^x(1-2e^x) \end{vmatrix}$$

2ος τρόπος!!!

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$W(x) = W(0)\, e^{-\int_0^x -\frac{4}{1} ds} = -e^{4x}$$

Παρατήρηση

Αν $\{y_1,\dots,y_n\}$ σύνολο λύσεων με $\omega(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0$ και $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ σύνολο λύσεων

τότε: $\omega(y_1,\dots,y_n)(x) = \omega(y_1,\dots,y_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds}$

$$\omega(\phi_1,\dots,\phi_n)(x) = \omega(\phi_1,\dots,\phi_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds}$$

$$\therefore \frac{\omega(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x)}{\omega(y_1,\dots,y_n)(x)} = \frac{\omega(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x_0)}{\omega(y_1,\dots,y_n)(x_0} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[x\in I]{} \omega(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x) = c\cdot \omega(y_1,\dots,y_n)(x)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο λύσεων $\{y_1,\dots,y_n\}$ της $(E_0)^{(n)}$ που αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της καλείται βασικό σύνολο λύσεων.

Θεώρημα 6

Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της $(E_0)^{(n)}$

Απόδειξη

Θεωρώ το Π.Α.Τ που προκύπτει από την $L(y)=0$ με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες

(c_1) $y(x_0)=1,\dots\ y'(x_0)=\dots=y^{(n-1)}(x_0)=0$

(c_2) $y(x_0)=0,\dots\ y'(x_0)=1,\ y''(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0$

$\vdots$

(c_n) $y(x_0)=0,\quad y^{(n-2)}(x_0)=0,\ y^{(n-1)}(x_0)=1$

Από το Θεώρημα ύπαρξης, έπεται ότι υπάρχουν (μοναδ.) λύσεις $y_1,\dots,y_n$ των $L(y)=0-(c_1),\dots(c_n)$ αντίστοιχα

Παρατηρώ ότι $\omega(y_1,\dots,y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

που σημαίνει ότι $\omega(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0,\ x\in I$ (Θ. Liouville), άρα (Θ_4) οι $y_1,\dots,y_n$

είναι γρ. ανεξάρτητες λύσεις της $(E_0)^{(n)}$.

Θεώρημα 7

Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της $(E_0)^{(n)}$. Τότε για κάθε y λύση της $(E_0)^{(n)}$, υπάρχουν μοναδικές σταθερές $c_1,\dots,c_n$ τέτοιες ώστε $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$.

Απόδειξη

(Ύπαρξη). Ας είναι $x_0 \in I$ θέτουμε

$$a_0 = y(x_0)$$
$$a_1 = y'(x_0)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$$

Θεωρώ το σύστημα (ως προς $c_1,\dots,c_n$)

$$a_0 = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0)$$
$$a_1 = c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0)$$

Παρατηρώ ότι το (S) είναι ένα $n \times n$ γραμμικό (μη ομογενές) σύστημα με ορίζουσα Wronskie, $W(y_1,\dots,y_n) \neq 0$ (επειδή $y_1,\dots,y_n$ γραμ. ανεξάρτητες). Επομένως, το (S) έχει μοναδική λύση $c_1,\dots,c_n$.

Η συνάρτηση $u(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$ είναι λύση της $(E_0)^{(n)}$ [γραμ. συνδυασμός λύσεων] και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u(x_0) = a_0 = y(x_0)$$
$$\vdots$$
$$u^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$$

Επομένως, (μοναδικότητα Π.Α.Τ) θα είναι $y(x) = u(x)$, $x \in I$ και $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$

Μοναδικότητα

Υποθέτουμε ότι για την y που μας δόθηκε ισχύει:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$
$$y(x) = d_1 y_1(x) + \dots + d_n y_n(x)$$

τότε $0 = (c_1 - d_1) y_1(x) + \dots + (c_n - d_n) y_n(x)$, $x \in I$

Επειδή οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμ. ανεξάρ. θα είναι $c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0 \Rightarrow c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x>0$. και $y_2(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{s^2/2}\,ds$, $x>0$. αποτελούν Β.Σ.Λ της $y''+xy'+y=0$, $x>0$ και να λύσετε το Π.Α.Τ $y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y'(1)=$

Είναι $y_1'(x) = -x e^{-x^2/2}$

$y_1''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2}$

Επομένως $y_1'' + xy_1 + y_1 = e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} = 0$

Όμοια για το y_2.

Αν c_1, c_2 σταθερές με $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, $x>0$ τότε $c_1 e^{-x^2/2} + c_2 e^{-x^2/2}\int_0^x e^{s^2/2}\,ds = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-x^2/2}\left[c_1 + c_2\int_0^x e^{s^2/2}\,ds\right] = 0$

1ος τρόπος: $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_2 \neq 0$ τότε $\underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{\text{σταθερά}} + \underbrace{\int_0^x e^{s^2/2}\,ds}_{\text{συνάρτηση } (\uparrow)} = 0$ (άτοπο)

συνάρτηση $(\uparrow)$, άρα δεν μπορεί να είναι ίση με μια σταθερά.

Αρκεί να προσδιορίσω c_1, c_2 σταθερές με $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ και

$y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

Έχουμε $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} = c_1 e^{-1/2} + c_2 e^{-1/2}\int_0^1 e^{s^2/2}\,ds$

$y'(1) = \left[\left[e^{-x^2/2}(-x)\right] c_1 + c_2\left[e^{-x^2/2}(-x)\int_0^x e^{s^2/2}\,ds + e^{-x^2/2}e^{x^2/2}\right]\right]$

$\left.\begin{array}{l} y(1) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad y_1'(x) = -x e^{-x^2/2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_1'(1) = -\frac{1}{\sqrt{e}} \end{array}\right\} \Rightarrow y = y_1$

Άσκηση

Αν y_1, y_2 λύσεις της $x^2y'' + xy' + (x^2 - c^2)y = 0$, $x>0$ με $y_1(1) = 1$, $y_1'(1) = 0$, $y_2(1) = 0$, $y_2'(1) = 1$

$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(1)\, e^{-\int_1^x \frac{s}{s^2}\,ds}$, $x>0$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{-\int_1^x \frac{1}{s}\,ds}$

$= e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, $x>0$ $\Rightarrow W(x) \neq 0$, $x>0 \Rightarrow y_1, y_2$ γρ. ανεξάρτητες